а отъ уравненията:

$$\frac{b+c-a}{2}=\lambda.\ t_1;\quad \frac{a+c-b}{2}=\lambda.\ t_2;\quad \frac{a+b-c}{2}=\lambda.\ t_3$$

ще получимъ:

$$a=\lambda\ (t_2+t_3)=\lambda.\ t_2+\lambda.\ t_3=\lambda.\ t_2+\frac{(t_1+t_2).\ t_1.\ t_2.\ \lambda}{t^2-t_1.\ t_2}=$$

$$=\frac{(t^2+t_1^2)\ t_2.\ \lambda}{t^2-t_1.\ t_2};\ b=\lambda.\ (t_1+t_3)=\lambda.\ t_1+\lambda.\ t_3=\lambda.\ t_1+$$

$$\frac{(t_1+t_2).\ t_1.\ t_2.\ \lambda}{t^2-t_1.\ t_2}=\frac{(t^2+t_2^2).\ t_1.\ \lambda}{t^2-t_1.\ t_2};\quad c=(t_1+t_2).\lambda$$

Ако тѣзи величини a, b и c замѣстимъ въ изражението $\triangle$, то подкоренната величина ще се обърне въ пъленъ квадратъ. Нъ тъй като споредъ условието както $\triangle$, тъй и a, b и c трѣба да бѫдѫтъ цѣли, то като разглеждаме t, t_1 и t_2 като цѣли числа прѣдполагаме, че $\lambda=t^2-t_1.\ t_2$; тогава

$$a=(t^2+t_1^2)t_2;\ b=(t^2+t_2^2)\ t_1;\ c=(t_1+t_2)\ (t^2-t_1.\ t_2)$$

Тѣзи изражения, въ които t, t_1 и t_2 означаватъ произволни цѣли числа, прѣдставляватъ общото рѣшение на въпроса: опрѣдѣляване плоското съдържание на триѫгълника въ цѣли числа.

Като замѣстимъ тѣзи изражения вмѣсто a, b и c, ще получимъ

$$\triangle=t.\ t_1.\ t_2\ (t_1+t_2)\ (t^2-t_1.\ t_2)$$

Като считаме напр., $t=6$, $t_1=3$, $t_2=9$, ще получимъ:

$$a=15;\ b=13;\ c=14;\ \triangle=84$$

Като считаме: $t=10$; $t_1=4$; $t_2=5$, ще получимъ:

$$a=29;\ b=25;\ c=36;\ \triangle=360.$$

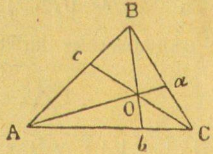
и за $t=4$; $t_1=3$; $t_2=4$ ще получимъ:

$$a=25;\ b=24;\ c=7;\ \triangle=84;\ \text{и т. н.}$$

§ 158. **Теорема.** *Ако прѣзъ произволна точка O (чер. 217) вѫтрѣ въ триѫгълника ABC и прѣзъ върховетѣ на тритѣ му ѫгли прѣкараме прави Aa, Bb и Cc, то ще имаме слѣдующитѣ съотношения* *):

$$\frac{Oa}{Aa}+\frac{Ob}{Bb}+\frac{Oc}{Cc}=1;\quad \frac{OA}{Aa}+\frac{OB}{Bb}+\frac{OC}{Cc}=2$$

$$\frac{OA.\ OB.\ OC}{Oa.\ Ob.\ Oc}=\frac{OA}{Oa}+\frac{OB}{Ob}+\frac{OC}{Oc}+2$$



Чер. 217.

Доказ. 1) Тъй като споредъ § 141 слѣд. 4

$$\frac{\triangle aOC}{\triangle AaC}=\frac{Oa}{Aa}=\frac{\triangle BOa}{\triangle ABa'}\ \text{то}\ \frac{\triangle aOC+\triangle BOa}{\triangle AaC+\triangle ABa}=$$

$$\frac{Oa}{Aa}\ \text{или}\ \frac{\triangle BOC}{\triangle ABC}=\frac{Oa}{Aa}$$

По сѫщия начинъ ще получимъ:

$$\frac{\triangle AOC}{\triangle ABC}=\frac{Ob}{Bb};\quad \frac{\triangle BOA}{\triangle ABC}=\frac{Oc}{Cc}$$

---

*) Ейлеръ въ особенно съчинения развилъ както тѣзи три съотношения, тъй и аналогичнитѣ формули за сферическия триѫгълникъ, като се основавалъ на послѣднето уравнение, което той доказва съ помощьта на тригонометрията.