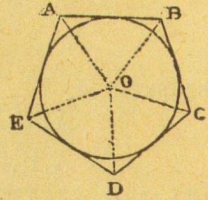


многожълникъ $ABCDE$ (чер. 213) е равно на половината отъ произведението на периметра и радиуса на кръга.

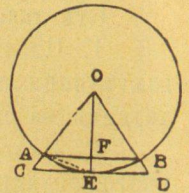
Доказ. Като съединимъ центра O на кръга съ върховетъ на описания многожълникъ, раздѣляме го на трижълници, които иматъ еднакви височини, равни на радиуса на кръга. Ако означимъ периметра на многожълника съ p и радиуса на кръга съ r , тогава $ABCDE = \frac{p \cdot r}{2}$.



Чер. 213.

§ 153. **Теорема.** Плоското съдържание на правилния вписанъ многожълникъ е средно пропорционално между плоскитъ съдържания на вписания и описания многожълници, които иматъ два пжти помалко страни.

Доказ. Нека AB (чер. 214) бжде страна на правилния вписанъ многожълникъ, който има n страни и E_n плоскостъта му, CD страна на описания многожълникъ, който така също има n страни и U_n плоскостъта му, най послѣ AE страната на вписания многожълникъ, който има $2n$ страни и E_{2n} плоскостъта му: тогава



Чер. 214.

$$E_n = n \cdot \Delta OB = 2n \cdot \Delta OF$$

$$U_n = n \cdot \Delta OD = 2n \cdot \Delta OE; \quad E_{2n} = 2n \cdot \Delta OE.$$

Нъ споредъ § 141 слѣд. 4 имаме:

$$\frac{\Delta OF}{\Delta OE} = \frac{OF}{OE}; \quad \frac{\Delta OE}{\Delta OF} = \frac{OE}{OF}$$

а тъй като

$$\frac{OF}{OE} = \frac{OA}{OC}, \quad \text{то} \quad \frac{\Delta OF}{\Delta OE} = \frac{\Delta OB}{\Delta OD}. \quad \text{Като умножимъ}$$

числителя и знаменателя на $2n$, ще получимъ:

$$\frac{E_n}{E_{2n}} = \frac{E_{2n}}{U_n} \quad \text{или} \quad E_{2n}^2 = E_n \cdot U_n, \quad \text{което трѣбаше да докажемъ.}$$

Нека p_n и P_n бждатъ периметри на вписания и описания многожълници, които иматъ n страни, K апотема и r радиуса на кръга, тогава споредъ § 144 ще имаме:

$$E_n = p_n \cdot \frac{K}{2}; \quad U_n = P_n \cdot \frac{r}{2}$$

Като умножимъ почленно, ще получимъ:

$$E_n \cdot U_n = p_n \cdot P_n \cdot \frac{Kr}{4}. \quad \text{Нъ} \quad \frac{P_n}{p_n} = \frac{r}{K} \quad (\S 129, \text{ слѣд.}); \quad \text{отъ тука}$$

$$K = \frac{r \cdot P_n}{p_n} \quad \text{и като замѣстимъ ще получимъ:} \quad E_n \cdot U_n = p_n^2 \cdot \frac{r^2}{4}, \quad \text{а тъй ка-}$$

то споредъ прѣдидущето $E_n \cdot U_n = E_{2n}^2$, то слѣдва: $E_{2n}^2 = p_n^2 \cdot \frac{r^2}{4}$ и като извлѣчемъ корень квадратенъ, ще получимъ:

$$E_{2n} = \frac{p_n \cdot r}{2}$$

т. е. плоското съдържание на правилния вписанъ многожълникъ е