$2bc-(b^2+c^2-a^2)=2bc-b^2-c^2+a^2=a^2-(b^2+c^2-2bc)=$
$a^2-(b-c)^2=(a+b-c)\ (a+c-b)$

намѣрваме:

$$BD^2=\frac{(a+b+c)\ (b+c-a)\ (a+c-b)\ (a+b-c)}{4b^2}$$

отъ тука слѣдва:

$$BD=\frac{\sqrt{(a+b+c)\ (b+c-a)\ (a+c-b)\ (a+b-c)}}{2b}$$

Като опрѣдѣлихме височината BD на триѫгълника, ще получимъ:

$$\triangle=\frac{AC.\ BD}{2}=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)\ (b+c-a)\ (a+c-b)\ (a+b-c)}$$

Съ помощьта на това изражение се опрѣдѣля плоското съдържание на триѫгълника, ако сѫ дадени тритѣ му страни.

Това изражение може да се прѣдстави въ другъ видъ, като означимъ периметра на триѫгълника съ $2p$, т. е., като прѣдположимъ, че $a+b+c=2p$, тогава ще имаме:

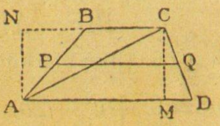
$$b+c-a=a+b+c-2a=2p-2a=2(p-a)$$
$$a+c-b=a+b+c-2b=2p-2b=2(p-b)$$
$$a+b-c=a+b+c-2c=2p-2c=2(p-c).$$

Като замѣстимъ въ прѣдидущето изражение, ще получимъ:

$$\triangle=\sqrt{p\ (p-a)\ (p-b)\ (p-c)}.$$

§ 143. **Теорема.** *Плоското съдържание на трапеца е равно на полу-суммата отъ успореднитѣ страни, умножена съ височината му.*

Нека ABCD (чер. 205) бѫде произволенъ трапецъ и CM височината му; трѣба да докажемъ, че плоското съдържание на трапеца ABCD е равно на $\frac{(AD+BC).\ CM}{2}$.



Чер. 205.

Доказ. Като прѣкараме диагонала AC и спуснемъ отъ точката A перпендикуляръ AN върху продължението на страната CB, ще получимъ (§ 141):

$$\triangle ACD=\frac{AD.CM}{2}\ \text{и}\ \triangle ABC=\frac{BC.AN}{2}.$$

Като събиремъ почленно тѣзи равенства и забѣлѣжимъ, че $AN=CM$ и $\triangle ACD+\triangle ABC=ABCD$, намѣрваме

$$ABCD=\frac{AD.CM}{2}+\frac{BC.AN}{2}=\frac{(AD+BC).CM}{2}$$

Ако прѣкараме линия PQ прѣзъ срѣдитѣ на неуспореднитѣ