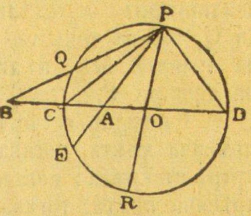
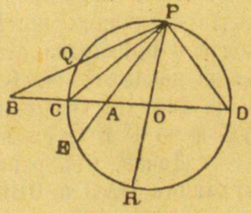
EPR и $\frac{PD-QC}{2}$ е мѣрка на жгъла PBD; слѣдователно CR—CE=PD—QC, Нъ джгитѣ PD и CR, които съотвѣтствуватъ на равни централни жгли, сж равни, затова и CE=QC; това значи, че линията PC располовява жгъла BPA. Вслѣдствие на това ще имаме (§ 63) $\frac{PB}{PA}=\frac{BC}{AC}$, което трѣбаше да докажемъ.



Чер. 180.

Обратна теорема. *Ако сж дадени двѣ точки A и B (чер. 181), тогава всѣка друга точка P, за която отношението $\frac{PB}{PA}$ се равнява на постоянното отношение $m:n$, лежи на окржжностьта на кржга, относително която A и B сж взаимни точки.*

Доказ. Раздѣляме линията AB на двѣ части, BC и AC въ отношение m : n, така щото $\frac{BC}{AC}=\frac{m}{n}$; нъ тъй като споредъ прѣдположението $\frac{PB}{PA}=\frac{m}{n}$, то слѣдва (§ 63), че линията PC располовява жгъла BPA. Ако прѣкараме линия PD перпендикулярно къмъ линията PC, послѣ располовимъ линията CD и отъ срѣдата ѝ O описваме окржжность съ радиусъ OC, тогава тази окржжность ще прѣмине прѣзъ точката P, защото жгъла CPD е правъ.



Чер. 181.

Като забѣлѣжимъ, че жгъла PBD се измѣрва съ $\frac{PD-QC}{2}$, а жгъла EPR съ $\frac{CR-CE}{2}$, и че CR=PD и CE=CQ, заключаваме, че $\sphericalangle PBD=\sphericalangle EPR$. Отъ това слѣдва, че тригжълницитѣ BPO и APO, които иматъ общъ жгълъ O и освѣнъ това $\sphericalangle PBD=\sphericalangle EPR$, сж подобни; слѣдователно, $\frac{OB}{OP}=\frac{OP}{OA}$ или $OB.OA=OP^2=OC^2$. Това уравнение показва, че точкитѣ A и B сж взаимни относително окржжностьта QPDR.

Ако въ уравнението OB. OA=OC² замѣстимъ OB и OA съ BC +OC и OC—AC, то ще получимъ: $(BC+OC).(OC-AC)=OC^2$ или като раскриемъ скобитѣ и съкратимъ, ще получимъ

$$OC\,(BC-AC)=BC.\,AC,$$

а отъ тука слѣдва:

$$OC=\frac{BC.\,AC}{BC-AC}.$$

Това уравнение показва, че радиуса на кржга зависи само отъ положението на точкитѣ A и B, и затова този радиусъ ще бжде еднакъвъ за всичкитѣ точки P, за които $\frac{PB}{PA}=\frac{m}{n}$.

Нека забѣлѣжимъ, че съ помощьта на това уравнение се опрѣдѣля въобще радиуса на управляющия кржгъ подъ даденото положение на двѣтѣ взаимни точки A и B.