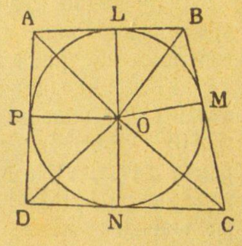
Като опишиме, отъ точката S_1 съ радиусъ OG и отъ точката R съ радиусъ RS, джги и прѣсѣчната имъ точка P съединимъ съ точкотѣ S_1 и R, тогава S_1PR ще бжде търсения трижгълникъ. Най-послѣ, ако направиме $S_1V=b$ и $PU=d$, то S_1PUV ще бжде търсения четвероѫгълникъ.

§ 110. **Теорема.** *Въ всѣкой описанъ четвероѫгълникъ суммитѣ на срѣщуположнитѣ му страни сж равни.*

Нека кажемъ, че ABCD (чер. 158) е описанъ четвероѫгълникъ; трѣба да докажемъ, че $AB+DS=BC+AD$.



Чер. 158.

Доказ. Съединяваме центра O съ върховетѣ на четвероѫгълника и спущаме отъ центра перпендикуляри върху странитѣ му. Тогава правоѫгълнитѣ триѫгълници LOB и MOB, които иматъ обща гипотенуза и по равенъ катетъ, сж сходни; триѫгълницитѣ MOC и NOC ще бждтъ сжщо така сходни и т. н. Отъ сходността на триѫгълницитѣ слѣдва;

$LB=BM$; $NC=MC$; $ND=DP$ и $AL=AP$

Като събиремъ почленно тѣзи равенства ще получимъ: $AB+CD=BC+AD$.

Обратна теорема. *Въ всѣкой четвероѫгълникъ, въ който суммитѣ на срѣщуположнитѣ му страни сж равни, може да се впише крѫгъ.*

Доказ. Нека кажемъ, че ABCD (чер. 158) е четвероѫгълникъ, въ който $AB+CD=AD+BC$. Като располовимъ двата му ѫгли A и B съ линиитѣ AO и BO, спущаме отъ точката O перпендикуляри върху странитѣ на четвероѫгълника. Отъ равенството на правоѫгълнитѣ триѫгълници AOP и AOL, MOB и LOB слѣдва: $OP=OL=OM$ и $AB=AP+BM$, а тъй като споредъ прѣдположението $AB+DC=AD+BC$, то слѣдва: $DC=PD+MC$.

Ако си въобразимъ, че триѫгълника OPD е приложенъ къмъ триѫгълника MOC така, щото страната OP да се слѣе съ OM, а PD да бжде продължение на страната MC, тогава ще получимъ триѫгълникъ, на който всичкитѣ страни съотвѣтственно ще бждтъ равни на странитѣ отъ триѫгълника DOC, слѣдов. тѣзи триѫгълници ще бждтъ сходни, затова и $ON=OM$ (§ 24, слѣд.). Отъ това слѣдва, че крѫга, който е описанъ отъ точката O съ радиусъ OL, ще се допира до всичкитѣ страни на четвероѫгълника.

Очевидно е, че линиитѣ OC и OD располовяватъ ѫглитѣ C и D; слѣдователно *въ четвероѫгълника, въ който суммитѣ на срѣщуположнитѣ му страни сж равни, линиитѣ, които располовяватъ ѫглитѣ му, се събиратъ въ една точка.*

§ 111. Продължаваме странитѣ AB и AC на триѫгълника ABC (чер. 159) и располовяваме ѫглитѣ CBB_1 и BCA_1, отъ прѣсѣчната точка O на линиитѣ, които располовяватъ тѣзи ѫгли, спущаме перпендикуляри OL, OM и ON върху странитѣ на триѫгълника, тогава правоѫгълнитѣ триѫгълници BOM и BOL, които иматъ обща гипотенуза OB и по равенъ остръ ѫгълъ, ще бждтъ равни; сжщо и пра-