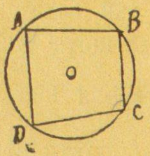
Нека кажемъ, че ABCD (чер. 153) е вписанъ четвероѫгълникъ; трѣба да докажемъ, че $\sphericalangle DAB + \sphericalangle DCB = 2d$.



Чер. 153.

Доказ. Тъй като ѫгъла DAB се измѣрва съ половина отъ дѫгата DCB (§ 93, слѣд. 1), а ѫгъла DCB — съ половина отъ дѫгата DAB, то суммата на ѫглитѣ DAB и DCB се измѣрва съ полу-суммата на дѫгитѣ DAB и DCB, т. е. съ полу-окрѫжностьта, а тя е мѣрка на два прави ѫгли.

Обратна теорема. *Около всѣкой четтвероѫгълникъ ABCD (чер. 153), въ който суммата на срѣщуположнитѣ му ѫгли е равна на два прави, може да се опише окрѫжность.*

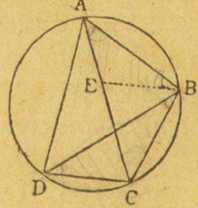
Доказ. Нека кажемъ, че $\sphericalangle DAB + \sphericalangle DCB = 2d$. Прѣкарваме окрѫжность прѣзъ тритѣ точки D, A и B, тогава тази окрѫжность ще прѣмине непрѣмѣнно и прѣзъ точката C, защото ако точката C лежѣше вѫтрѣ въ този крѫгъ, то суммата на ѫглитѣ A и C щѣше да бѫде по-голѣма отъ $2d$, което е противно на прѣдположението ни; ако ли пъкъ точката C лежѣше вънъ отъ крѫга, то суммата на ѫглитѣ A и C щѣше да бѫде по-малка отъ $2d$, което така сѫщо е противно на прѣдположението ни.

Отъ тази теорема слѣдва, че около всѣкой правоѫгълникъ може да се опише крѫгъ.

§ 107. **Теорема.** *Въ всѣкой вписанъ четвероѫгълникъ произведението отъ диагоналитѣ е равно на суммата отъ произведенията на срѣщуположнитѣ му страни.*

Нека кажемъ, че ABCD (чер. 154) е вписанъ четвероѫгълникъ, трѣба да докажемъ, че *) $BD.AC = AB.DC + AD.BC$.

Доказ. Отмѣрваме $\sphericalangle ABE = \sphericalangle DBC$, тогава триѫгълницитѣ ABE и DBC ще бѫдѫтъ подобни, защото споредъ построението иматъ $\sphericalangle ABE = \sphericalangle DBC$, и $\sphericalangle BAE = \sphericalangle BDC$, като ѫгли, които се измѣрватъ съ една и сѫща дѫга BC; затова $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AE}$, или $BD.\ AE = AB.\ DC$.



Чер. 154.

Послѣ, ако къмъ равнитѣ ѫгли ABE и

*) Тази забѣлѣжителна теорема се нарича *Птоломеева теорема*, защото за първий пѫть се срѣща въ неговото съчинение (въ 2-то столѣтие п. Р. Х), извѣстно въ науката подъ заглавие: „Алмагесть“ ($\mathit{Μεγάλη\ σύνταξις}$).